Indonesian Journal of Education and Mathematical Science
Journal Homepage: http://jurnal.umsu.ac.id/index.php/IJEMS/index

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN RHO TOPI PADA GRAF ILALANG

Zulfi Amri [1],
Magister Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
Medan
Indonesia
zulfiamri@umsu.ac.id

Kiki A.Sugeng[2]
Departemen of Mathematics
Universitas Indonesia
Depok
Indonesia
paridah02@gmail.com

ABSTRAK

Suatu graf G = (V,E) adalah pasangan himpunan terurut dimana V adalah himpunan simpul tak kosong dan E adalah himpunan busur. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, berseta dengan variasi dan modifikasi pelabelan graceful yaitu pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$. Graf Ilalang adalah suatu graf yang dibangun dari r buah graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul c disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul c tersebut. Selanjutnya graf tersebut diberikan konstruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf ilalang.

Kata kunci:
Pelabelan Graceful
Pelabelan Skolem Graceful
Pelabelan $\hat{\rho}$
Graf Ilalang.

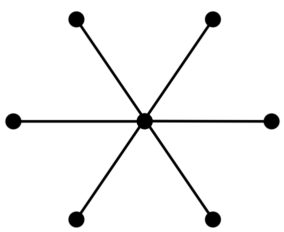
E-ISSN: 2715-985X1

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

1. PENDAHULUAN

Suatu graf G adalah suatu pasangan terurut (V, E) dengan V merupakan himpunan *simpul* (*node*) dan E adalah himpunan *busur.* Pelabelan pada suatu graf pada dasarnya adalah memberikan nilai tertentu pada simpul dan atau busur yang memenuhi aturan tertentu pula. Galian mencatat selama 50 tahun terakhir lebih dari 1200 artikel yang membahas tentang bebagai macam pelabelan. Secara umum, **Pelabelan graceful** pada graf G(*V,E*) adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif $f^{'}$ dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku f' (*uv*) = $|f(u) - f(v)|$. Sedangkan **Pelabelan skolem graceful** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu berupa fungsi injektif g dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif $g^{'}$ dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku $g^{'}$ (*uv*) = $|g(u) - g(v)|$. **Pelabelan $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif h dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif $h^{'}$ dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku $h^{'}$ (*uv*) = $|h(u) - h(v)|$.[1,2,3,4]

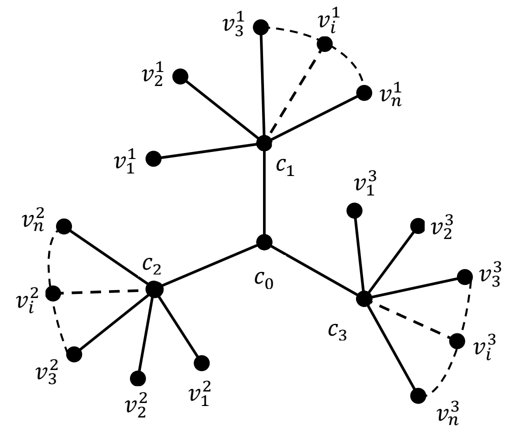
Graf bintang $\boldsymbol{S_n}$ adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpuls pusat tersebut. Graf bintang memiliki *n*+1 simpul dan *n* busur (Choudum & Kishore, 1996).



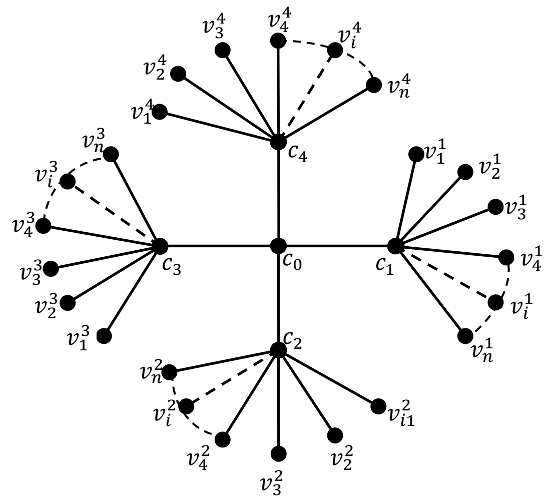
Gambar 1.1 Graf bintang S_6

Graf bintang merupakan sub kelas dari graf pohon, karena graf bintang tidak mempunyai subgraf lingkaran.

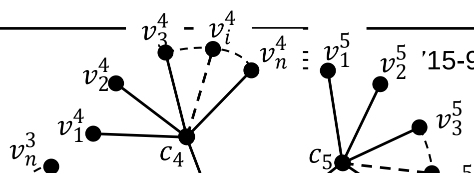
Graf Ilalang $(\boldsymbol{S_n, r})$ adalah suatu graf yang dibangun dari r buah graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul c disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan simpul c ke setiap simpul pusat S_n. Selanjutnya untuk $r = 3$ disebut graf ilalang $(S_n, 3)$, untuk $r = 4$ disebut graf ilalang $(S_n, 4)$, untuk $r = 5$ disebut graf ilalang $(S_n, 5)$ dan seterusnya. Pada Gambar 2.8 diberikan beberapa contoh graf ilalang. [1].



Gambar 1.2a Penamaan Simpul Graf Ilalang $(S_n, 3)$



Gambar 1.2b Penamaan Simpul Graf Ilalang $(S_n, 4)$



'15-985X2

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

2. PELABELAN PADA GRAF ILALANG $(S_n, 3)$

Menurut Amri dkk (2011) graf illalang $(S_n, 3)$ merupakan graf graceful, graf sekolem graceful dan graf $\hat{\rho}$ diberikan pada teorema dan akibat berikut:

Teorema 2.1 Graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan graceful**.**

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ diberikan pada Gambar 1.2a

Pada Gambar 1.2a diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n, 3) = \{c_0, c_1, c_2, c_3, v_1^1, v_2^1, .., v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3\}$ himpunan busur $E(S_n, 3) = \{c_0c_1, \dots, c_0c_3, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \dots, c_3v_n^3\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $3n + 4$ dan $3n + 3$ dinotasikan dengan $|V| = 3n + 4$ dan $|E| = 3n + 3$.

Didefinisikan pelabelan, dengan menggunakan notasi f, untuk simpul sebagai berikut :

$f(c_0) = 2n + 3$ (2.1)

$f(c_1) = 0$ (2.2)

$f(c_2) = 1$ (2.3)

$f(c_3) = n + 2$ (2.4)

$f(v_i^1) = 3n + 4 - i$, untuk i = 1,2….,n (2.5)

$f(v_i^2) = 2n + 3 - i$, untuk i = 1,2….,n (2.6)

$f(v_i^3) = n + 2 - i$, untuk i = 1,2….,n (2.7)

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (*2.1*)-(*2.7*), melabelkan setiap anggota $V(S_n, 3)$ dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan f', yang diinduksikan oleh pelabelan simpul, $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 3)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(c_0c_1) &= |f(c_0) - f(c_1)| \\ &= |(2n + 3) - (0)| \\ &= 2n + 3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} f'(c_0c_2) &= |f(c_0) - f(c_2)| \\ &= |(2n + 3) - (1)| \\ &= 2n + 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} f'(c_0c_3) &= |f(c_0) - f(c_3)| \\ &= |(2n + 3) - (n + 2)| \\ &= n + 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} f'(c_1v_i^1) &= |f(c_1) - f(v_i^1)| \\ &= |(0) - (3n + 4 - i)| \\ &= 3n + 4 - i, \\ &\text{untuk } i=1,2\dots,n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f'(c_2v_i^2) &= |f(c_2) - f(v_i^2)| \\ &= |(1) - (2n + 3 - i)| \\ &= 2n + 2 - i, \\ &\text{untuk } i=1,2\dots,n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

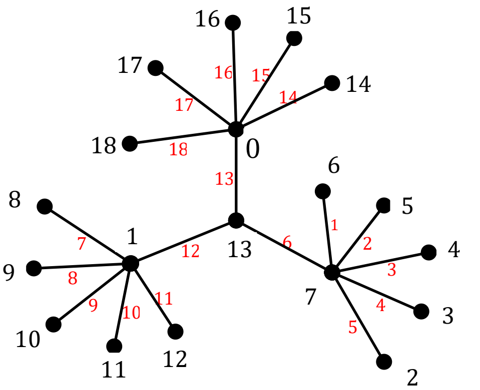
$$\begin{aligned} f'(c_3v_i^3) &= |f(c_3) - f(v_i^3)| \\ &= |(n + 2) - (n + 2 - i)| \\ &= i, \quad \text{untuk } i=1,2\dots,n \end{aligned} \quad (2.13)$$

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (*2.1*)-(*2.7*) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (*2.8*)–(2.*13*) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$. Berdasarkan hasil diatas, maka f merupakan pelabelan graceful untuk graf ilalang $(S_n, 3)$. ■

E-ISSN: 2715-985X3

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful pada graf ilalang $(S_5, 3)$.



Gambar 2.1 Pelabelan Graceful Pada Graf Ilalang $(S_5, 3)$

Semua kelas graf graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf skolem graceful dengan mendefinisikan $g(x) = g(x) + 1$ dimana g merupakan notasi untuk pelabelan skolem graceful dan $x \in V(S_n, 3)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

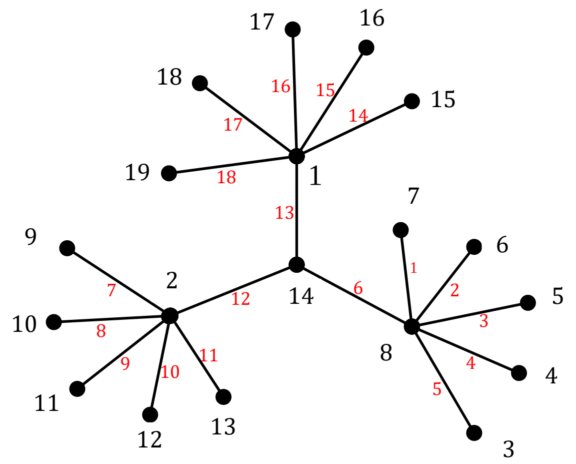
Akibat 2.2 Graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan skolem graceful.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ yang diberikan seperti pada Gambar 1.2a

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul dengan menambahkan 1 disetiap label simpul yang digunakan pada persamaan (*2.1*)-(*2.7*) di Teorema 2.1, sehingga $g(x) = g(x) + 1$ untuk setiap $x \in V(S_n, 3)$ dimana f adalah pelabelan pada bukti Teorema 3.1, pelabelan yang didefinisikan oleh g akan melabelkan setiap anggota $V(S_n, 3)$ dengan pelabelan $g(V(S_n, 3))$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1,2, \dots, |V|\}$, $u, v \in V$. Sehingga setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan $g^{'}(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 3)$ yang menghasilkan sama seperti persamaan (*2.8*)–(*2.13*).

Berdasarkan pelabelan g yang terdefinisikan dari bukti Teorema 2.1 setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |V|\}$. Kemudian pelabelan $g^{'}$ sama seperti persamaan (*2.8*)–(*2.13*) yang diinduksi oleh pelabelan simpul g menghasilkan sama seperti bukti Teorema *2.1*, sehingga memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur dan merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$. Maka μ merupakan pelabelan skolem graceful untuk graf Ilalang $(S_n, 3)$.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan skolem graceful untuk graf ilalang $(S_5, 3)$.



Gambar 2.2 Pelabelan Skolem Graceful Pada Graf Ilalang $(S_5, 3)$

Semua kelas graf graceful dan graf skolem graceful dengan $|V| = |E| + 1$ akan merupakan graf $\hat{\rho}$ dengan mendefinisikan $\mathrm{h}(x) = g(x)$ atau $\mathrm{h}(x) = f(x)$, dimana h merupakan notasi untuk pelabelan $\hat{\rho}$, g merupakan notasi untuk pelabelan skolem graceful dan $x \in V(S_n, 3)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.3 Graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Misal notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ ditunjukkan pada Gambar 1.2a

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian graceful pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\mathrm{h} = f$ seperti persamaan (*2.1*)–(*2.7*) Teorema 2.1 atau dengan cara yang sama pada pembuktian seperti Akibat 2.2 $h = g$, maka menginduksikan pelabelan busur $h'(uv) = |h(u) - h(v)|$ dimana $uv \in E$ dan $u, v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari graf ilalang $(S_n, 3)$ ke subhimpunan

E-ISSN: 2715-985X4

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari graf ilalang $(S_n,3)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Sedemikian sehingga graf ilalang $(S_n,3)$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

3. PELABELAN PADA GRAF ILALANG ($S_n,4$)

Graf illalang $(S_n,4)$ juga merupakan graf graceful, graf sekolem graceful dan graf $\hat{\rho}$ ditunjukkan pada teorema dan akibat-akibat berikut:

Teorema 3.1 Graf illalang $(S_n,4)$ memiliki pelabelan graceful**.**

Bukti. Dengan cara yang sama seperti Teorema 2.1, Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n,4)$ diberikan pada Gambar 1.2b

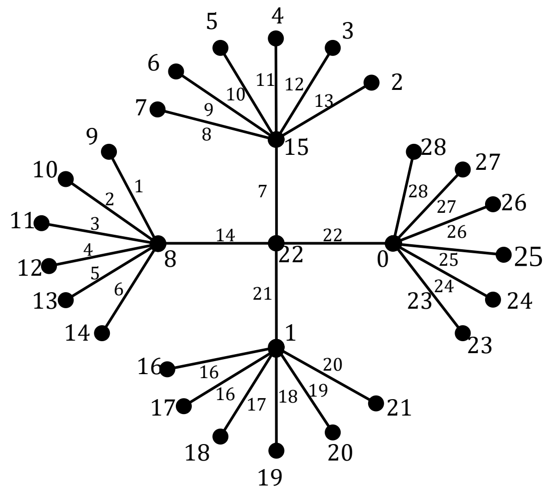
Pada Gambar 1.2b diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n,4)$ =$\{c_0,\ldots,c_4,v_1^1,v_2^1,\ldots,v_n^1,v_1^2,v_2^2,\ldots,v_n^2,v_1^3,v_2^3,\ldots,v_n^3,v_1^4,v_2^4,\ldots,v_n^4\}$ himpunan busur $E(S_n,4)$ = $\{c_0c_1,\ldots,c_0c_4,c_1v_1^1,\ldots,c_1v_n^1,c_2v_1^2,\ldots,c_2v_n^2,c_3v_1^3,\ldots,c_3v_n^3,c_4v_1^4,\ldots,c_4v_n^4\}$ sehingga $|V|$ = $4n$ + 5 dan $|E|$ = $4n$ + 4.

Didefinisikan pelabelan, dengan menngunakan notasi f, untuk simpul sebagai berikut :

$f(c_0)=3n+4$ *(3.1)*
$f(c_1)=0$ *(3.2)*
$f(c_2)=1$ *(3.3)*
$f(c_3)=n+2$ *(3.4)*
$f(c_4)=2n+3$ *(3.5)*
$f(v_i^1)=4n+5-i$, untuk $i=1,2,\ldots,n$ *(3.6)*
$f(v_i^2)=3n+4-i$, untuk $i=1,2,\ldots,n$ *(3.7)*
$f(v_i^3)=2n+3-i$, untuk $i=1,2,\ldots,n$ *(3.8)*
$f(v_i^4)=n+2-i$, untuk $i=1,2,\ldots,n$ *(3.9)*

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (*3.1*)-(*3.9*), melabelkan setiap anggota $V(S_n,4)$ dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0,1,\ldots,|E|\}$. Setiap busur $uv\in E$ diberikan label dengan pelabelan busur f' yang di induksikan oleh pelabelan, $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ akan menunjukkan label busur pada graf ilalang $(S_n,4)$ yang berbeda sehingga memenuhi defenisi pelabelan graceful, sehingga dinyatakan sebagai graf graceful.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf ilalang $(S_6,4)$.



Gambar 3.1 Pelabelan Graceful Pada Graf Ilalang $(S_6,4)$

Hal yang sama dilakukan pada graf ilalang $(S_n,4)$ seperti akibat 2.2 dan akibat 2.3 maka graf ilalang $(S_n,4)$ memenuhi defenisi pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

4. PELABELAN PADA GRAF ILALANG ($S_n,5$)

Serupa halnya dengan graf illalang $(S_n,3)$ dan $(S_n,4)$, graf illalang $(S_n,5)$ juga merupakan graf graceful, sekolem graceful dan graf $\hat{\rho}$ yang akan ditunjukkan pada Teorema 3.5 berikut:

Teorema 4.1 Graf Ilalang $(S_n,5)$ memiliki pelabelan graceful**.**

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n,5)$ diberikan pada Gambar 1.2c**.**

Pada Gambar 1.2c diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n,5)=\{c_0,c_1,\ldots,c_5,v_1^1,v_2^1,\ldots,v_n^1,v_1^2,v_2^2,\ldots,v_n^2,v_1^3,v_2^3,\ldots,v_n^3,v_1^4,v_2^4,\ldots,v_1^5,v_2^5,\ldots,v_n^5\}$, himpunan busur $E(S_n,3)=\{c_0c_1,\ldots,c_0c_5,c_1v_1^1,\ldots,c_1v_n^1,c_2v_1^2,\ldots,c_2v_n^2,c_3v_1^3,\ldots\ldots\ldots,c_3v_n^3,c_4v_1^4,\ldots,c_4v_n^4,c_5v_1^5,\ldots,c_5v_n^5\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-

E-ISSN: 2715-985X5

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

masing adalah $5n + 6$ dan $5n + 5$ dinotasikan dengan $|V| = 5n + 6$ dan $|E| = 5n + 5$.

Didefinisikan pelabelan, dengan menngunakan notasi f, untuk simpul ditunjukkan pada persamaan *(4. 1) – (4.11)* berikut :

$f(c_0) = 4n + 5$ *(4.1)*

$f(c_1) = 0$ *(4.2)*

$f(c_2) = 1$ *(4.3)*

$f(c_3) = 3$ *(4.4)*

$f(c_4) = 2n + 2$ *(4.5)*

$f(c_5) = 2n + 4$ *(4.6)*

$f(v_i^1) = 5n + 6 - i$, untuk *i* = 1,2….,*n* *(4.7)*

$f(v_i^2) = 4n + 6 - 2i$, untuk *i* = 1,2….,*n* *(4.8)*

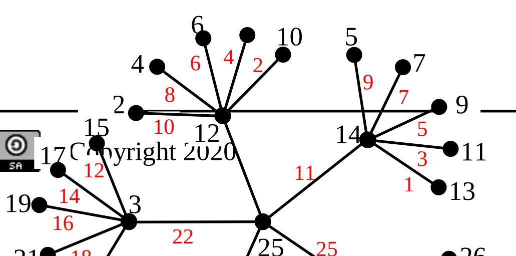
$f(v_i^3) = 4n + 5 - 2i$, untuk *i* = 1,2….,*n* *(4.9)*

$f(v_i^4) = 2i$, untuk *i* = 1,2….,*n* *(4.10)*

$f(v_i^5) = 2i + 3$, untuk *i* = 1,2….,*n* *(4.11)*

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (*4.1*)-(*4.11*), melabelkan setiap anggota $V(S_n, 5)$ dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur f' yang di induksikan oleh pelabelan, $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ akan menunjukkan label busur pada graf ilalang $(S_n, 5)$ yang berbeda sehingga memenuhi defenisi pelabelan graceful, sehingga dinyatakan sebagai graf graceful.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf ilalang $(S_5, 5)$.



Hal yang sama dilakukan pada graf ilalang $(S_n, 5)$ seperti akibat 2.2 dan akibat 2.3 maka graf ilalang $(S_n, 5)$ memenuhi defenisi pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

5. KESIMPULAN

Pada makalah ini telah diberikan kontruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf ilalang (S_n, r) untuk $3 \le r \le 5$. Lebih umum dapat dibuktikan bahwa graf ilalang memiliki pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$. saat ini penulis sedang melakukan generalisasi untuk $r = n$.

DAFTAR PUSTAKA

Amri Z., Ahmad M., Huda N., Supriadi., Sugeng K.A., (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf* $(S_n, 3)$. Prosiding Seminar Nasional UNY, Yogjakarta, hal. M 131- M 136.

Amri Z., Sugeng K.A., (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf Kelabang.* Jurnal Eureka. Pendidikan Matematika, FKIP-UMSU, Medan, hal. 109-115.\

Galian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Lebeling. *Electronic Journal of kombinatorics,17#ds6*

Sevenhot, KikiA. Sugeng, Denny R. Silaban (2010). *Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Gabungan Dua Graf*.

E-ISSN: 2715-985X6

https://doi.org/10.30596/ijems.v1i1.2956

Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung, hal MS 183- MS 191.

E-ISSN: 2715-985X7