Jurnal EduTech Vol. 4 No.1 Maret 2018 *ISSN: 2442-6024*
e-ISSN: 2442-7063

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF $2S_n(C_4, n)$

Zulfi Amri[1], Ardina Aulia[1], Army Syella[1], Harisma Pratamal[1], Safitri Ramadhani[1], Chairunnisa[1]

[1]Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
zulfiamri@umsu.ac.id; ardinaaulia881@gmail.com

ABSTRAK

Graf G = (V,E) dengan V merupakan suatu himpunan simpul yang tidak kosong dan E merupakan suatu himpunan busur yang boleh kosong. Setiap graf yang dapat diberi pelabelan harmonis ganjil disebut dengan graf harmonis ganjil yaitu graf dengan fungsi $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, 2q - 1\}$ yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \ldots, 2q - 1\}$ yang bersifat bijektif, didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ dan fungsi f merupakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf tersebut. Graf $2S_n(C_4, n)$ adalah graf yang dibentuk dari k graf lingkaran C_4 dengan dua simpul pusat persekutuan u_0^1 dan u_0^2. Pada makalah ini akan ditunjukkan bahwa graf $2S_n(C_4, n)$ memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf $2S_n(C_4, n)$ adalah graf harmonis ganjil.

Kata kunci: pelabelan harmonis ganjil, graf $\boldsymbol{2S_n(C_4, n)}$

I. PENDAHULUAN

Sampai tahun 2016, lebih dari 2000 jurnal yang membahas tentang berbagai macam pelabelan pada graf yang telah ditemukan dan dihimpun serta diperbaharui secara teratur oleh Joseph A Gallian [1]. Salah satu pelabelan graf yang telah ditemukan yaitu pelabelan harmonis yang diperkenalkan pertamakali oleh Graham dan Sloane pada tahun 1980 [1] dan pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Liang dan Bai[2].

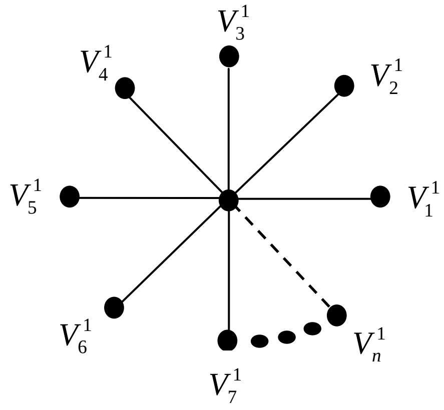
Liang dan Bai [2] telah menunjukkan sifat-sifat yang dimiliki oleh pelabelan harmonis ganjil dan telah membuktikan graf lingkaran C_n disebut graf harmonis ganjil jika dan hanya jika n ≡ 0 (mod 4). Beberapa hasil penelitian yang relevan dengan penelitian ini diantaranya yaitu Firmansyah dan Yuwono [3] membuktikan bahwa graf ular jarring $kL_{3,3}$ dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf ular jarring $kL_{3,3} \cup kL_{3,3}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansyah dan Sugeng [4] membuktikan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan k ≥ 1 dan graf $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan k ≥ 1 adalah graf harmonis ganjil.

Selain itu diantaranya Jeyanthi dan Philo [5] membuktikan bahwa ada dua siklus yang membagi simpul yang sama dan busur yang sama disebut dengan graf harmonis ganjil; Abdel-Aal [6] membuktikan bahwa produk Cartesian dari siklus graf C_m dan P_n untuk setiap n ≥ 2, m ≡ 0 (mod 4) adalah graf harmonis ganjil; Vaidya dan Shah [7] membuktikan bahwa graf bayangan dari P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil; dan Firmansyah [8] membuktikan bahwa pada gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan k ≥ 1 dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan k ≥ 1 dan r ≥ 1 sedemikian sehingga gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan k ≥ 1dan graf ular berlipat $kC_4(r)$ dengan k ≥ 1 dan r ≥ 1 adalah graf harmonis ganjil.

Setiap graf yang dapat diberi pelabelan harmonis ganjil disebut dengan graf harmonis ganjil yaitu graf dengan fungsi $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, 2q - 1\}$ yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \ldots, 2q - 1\}$ yang bersifat bijektif, didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ dan fungsi f merupakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf tersebut.

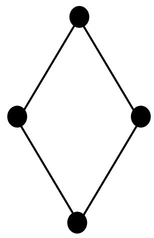
Ide pembentukan graf $2S_n(C_4, n)$ yaitu pertama mencari pola graf baru yang sesuai dengan pelabelan harmonis ganjil dengan mengkombinasikan graf lingkaran C_4 dengan menambahkan graf bintang. Setelah graf lingkaran C_4 dan graf bintang tersebut sesuai dengan pelabelan harmonis ganjil, kemudian kembali dicoba sampai dengan k graf lingkaran C_n. Unsur pembentukan graf $2S_n(C_4, n)$ adalah graf bintang dengan dua simpul pusat persekutuan u_0^1 dan u_0^2 dan k graf lingkaran C_n.

Graf bintang (*star*) disebut dengan graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order (n + 1) dan ukuran n, selanjutnya S_n ditulis sebagai S_n^1
S_n : graf bintang dengan (n + 1) titik.



Gambar 1.1 **Graf Bintang S_n**

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul diberi symbol C_n.



Gambar 1.2 Graf lingkaran C_n

Pada makalah ini akan ditunjukkan bahwa graf $2S_n(C_n, n)$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf $2S_n(C_n, n)$ adalah graf harmonis ganjil.

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan pada makalah ini adalah studi literatur dengan mempelajari makalah yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan pelabelan harmonis ganjil pada graf $2S_n(C_n, n)$. Berikut diberikan langkah-langkah yang dilakukan

1. Melakukan kajian dan analisa untuk memahami definisi pelabelan harmonis ganjil beserta sifat-sifatnya.
2. Membuat definisi, notasi simpul dan kontruksi dari graf $2S_n(C_n, n)$
3. Mendefinisikan fungsi pelabelan simpul dan pelabelan busur pada graf $2S_n(C_n, n)$
4. Membuat teorema pelabelan harmonis ganjil pada graf $2S_n(C_n, n)$
5. Melakukan pembuktian teorema yang diperoleh secara matematis.

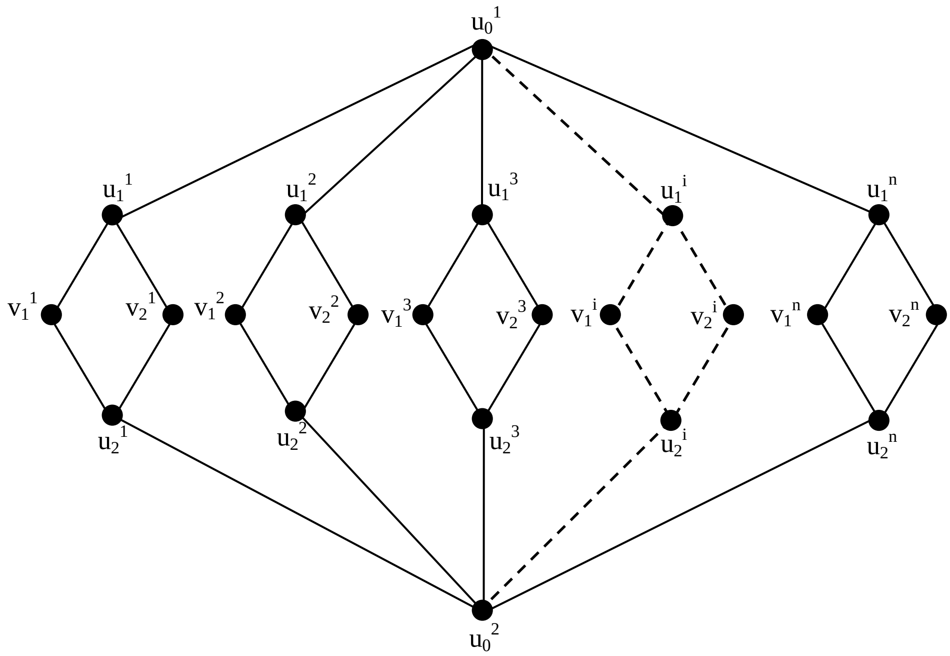
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Definisi dan Kontruksi dari Graf $2S_n(C_n, n)$

Berikut diberikan definisi, notasi simpul dan kontruksi dari graf $2S_n(C_n, n)$, selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf $2S_n(C_n, n)$.

Definisi 1. *Graf $2S_n(C_n, n)$ adalah graf yang dibentuk dari gabungan graf bintang S_n dan setiap daun dari graf bintang S_n dihubungkan dengan graf lingkaran C_4 dan simpul yang berhadapan pada graf lingkaran C_4 diberikan lagi graf bintang S_n berlaku untuk semua simpul daun pada S_n.*

Notasi simpul dan kontruksi dari graf $2S_n(C_n, n)$ pada Gambar 3.1 sebagai berikut :



Gambar 3.1. Notasi Simpul dan Kontruksi dari Graf $2S_n(C_n, n)$

Berdasarkan kontruksi pada Gambar 3.1 maka diperoleh himpunan simpul dan himpunan busur dari graf $2S_n(C_n, n)$ adalah $V\big(2S_n(C_n, n)\big) = \{u_0^1,\ u_0^2, u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^n, u_2^1, u_2^2, \dots, u_2^n, v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^n, v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^n\}$ dan $E\big(2S_n(C_n, n)\big) = \{u_0^1 u_1^1, u_0^1 u_1^2, \dots, u_0^1 u_1^n, u_1^1 v_1^1, u_1^2 v_1^2, \dots, u_1^n v_1^n, u_1^1 v_2^1, u_1^2 v_2^2, \dots, u_1^n v_2^n, v_1^1 u_2^1, v_1^2 u_2^2, \dots, v_1^n u_2^n, v_2^1 u_2^1, v_2^2 u_2^2, \dots, v_2^n u_2^n, u_2^1 u_0^2, u_2^2 u_0^2, \dots, u_2^n u_0^2\}$. sehingga banyaknya simpul dinotasikan dengan p pada graf $2S_n(C_n, n)$ adalah $4n + 2$ dan banyaknya busur dinotasikan dengan q adalah $6n$.

3.2. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf $2S_n(C_n, n)$

Berikut akan diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf $2S_n(C_n, n)$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf $2S_n(C_n, n)$ adalah graf harmonis ganjil, dan diberikan juga beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema 1. *Graf* $2S_n(C_n, n)$ *adalah graf harmonis ganjil*

Bukti. Misalkan graf $2S_n(C_n, n)$ adalah graf dengan himpunan simpul dan himpunan busur seperti penjelasan Gambar 3.1 diatas.

Didefinisikan fungsi pelabelan simpul $f : V(2S_n(C_n, n)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 12n - 1\}$ sebagai berikut :

$f(u_0^1) = 0$ (1)

$f(u_1^i) = 2i - 1,$ $i = 1,2, \dots, n$ (2)

$f(v_1^i) = q - 6i + 4,$ $i = 1,2, \dots, n$ (3)

$f(v_2^i) = q - 6i + 2,$ $i = 1,2, \dots, n$ (4)

$f(u_2^i) = q - 2n + 2i - 1,$ $i = 1,2, \dots, n$ (5)

$f(u_0^2) = q$ (6)

Fungsi pelabelan f akan menginduksi pelabelan $f : E(2S_n(C_n, n)) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 12n - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ sehingga didapat fungsi pelabelan busur sebagai berikut :

$f^*(u_0^1 u_1^i) = f(u_0^1) + f(u_1^i) = 2i - 1,$ $i = 1,2, \dots, n$ (7)

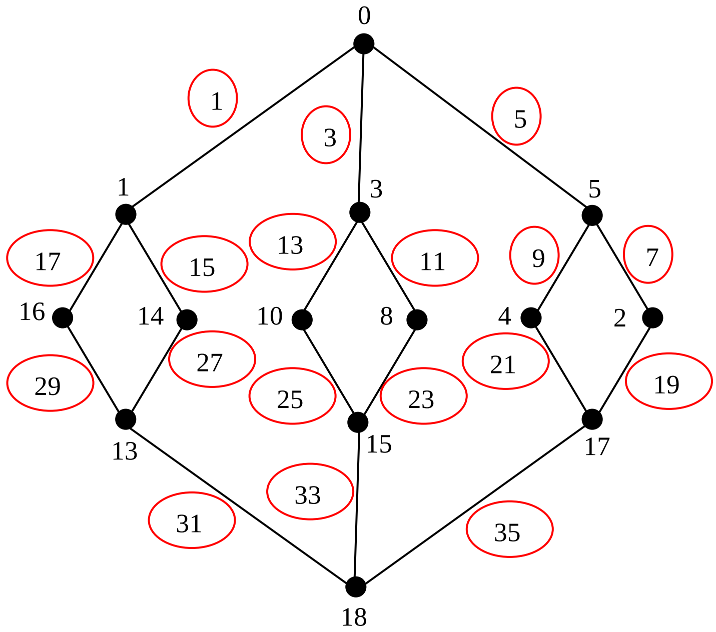
$f^*(u_1^i v_1^i) = f(u_1^i) + f(v_1^i) = q - 4i + 3,$ $i = 1,2, \dots, n$ (8)

$f^*(u_1^i v_2^i) = f(u_1^i) + f(v_2^i) = q - 4i + 1,$ $i = 1,2, \dots, n$ (9)

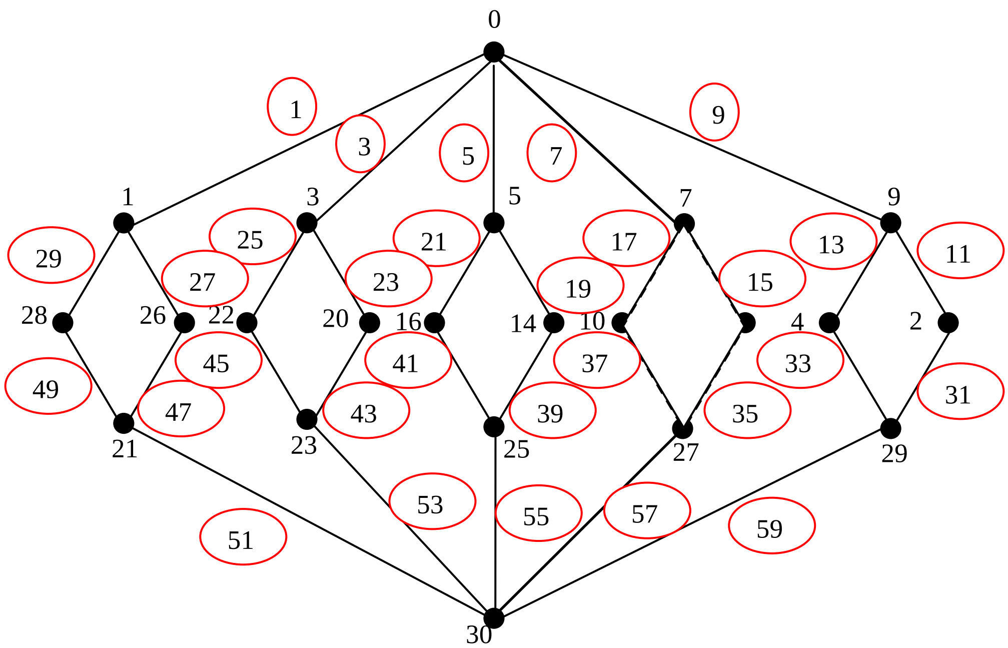
$$f^*(v_1^i u_2^i) = f(v_1^i) + f(u_2^i) = 2n - 4i - 3, \quad i = 1,2, \dots, n \quad (10)$$
$$f^*(v_2^i u_2^i) = f(v_2^i) + f(u_2^i) = 2n - 4i + 1, \quad i = 1,2, \dots, n \quad (11)$$
$$f^*(u_2^i u_0^2) = f(u_2^i) + f(u_0^2) = 2n + 2i - 1, \quad i = 1,2, \dots, n \quad (12)$$

Dari persaman-persamaan tersebut diatas dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi f^* yang bersifat bijektif serta memenuhi defenisi pelabelan harmonis ganjil. Graf $2S_n(C_n, n)$ disebut sebagai graf harmonis ganjil. ∎

Contoh 1.



Contoh 2.



IV SIMPULAN DAN SARAN

Pada makalah ini telah dikonstruksikan pelabelan harmonis ganjil pada graf $2S_n(C_n, n)$sedemikian sehingga graf $2S_n(C_n, n)$adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut, sehingga memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

ISSN: 2442-6024
e-ISSN: 2442-7063

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gallian, J. A. 2016. *A Dynamic Survey of Graph Labelin*. The electronic journal of combinatorics

[2] Liang, Z., Bai, Z. 2009. *On The Odd Harmonious Graphs with Application*. J. Appl. Math. Comput., 29, 105-116.

[3] Firmansah, F., Yuwono, M. R. 2017. *Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product*. Jurnal Matematika, vol. 03

[4] Firmansah, F., Sugeng, K. A. 2015. *Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda*. Magistra, No 94 Th. XXVII, ISSN 0215-9511, 56-92.

[5] Jeyanthi, P. dan Philo, S. 2016. *Odd Harmonious Labeling of Some Cycle Related Graphs*. Proyecciones Journal of Matematics, 35(1). 85-98.

[6] Abdel-Aal, M. E. 2014. *News Families of Odd Harmonious Graphs*. IJSCMC, Vol 3, No 1.

[7] Vaidya, S. K., Shah, N. H. 2011. *Some New Odd Harmonious Graphs*. International Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol 1, 9-16

[8] Firmansah, F. 2016. *Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat.* Proceeding Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP 1) UMS. 809-818. 12